

固有振動について

- 断熱遷移とニュートリノ振動 -

岡山大学 理学部物理学科

作田 誠 sakuda@psun.phys.okayama-u.ac.jp

西山 由弘 nisiyama@psun.phys.okayama-u.ac.jp

神戸大学 理学研究科物理学専攻

園田 英徳 hsonoda@kobe-u.ac.jp

2008年5月25日

1 振り子模型とニュートリノ振動

大学で「振動」を教える時に一番重要となる概念は固有振動である。固有振動を使わずには、振動現象が理解できないばかりか、運動方程式さえ解けない。目で見える模型で固有振動を学生に実感してもらい、かつその考えが最先端の研究にも役立つことを認識してもらうことを、筆者らはめざした¹。

これをつぎの三つのステップで行う。

1. 単振り子で固有振動を簡単に説明する。
2. 連成振り子で、うなりが現れる場合と、片方の振り子の長さをゆっくり変えて断熱遷移が起きる場合について、模型を使って説明する。
3. 連成振り子のこの二つの現象と、量子力学的なニュートリノ振動の等価なことを説明する。

物理を履修した高校生や大学生は、うなりは習っているので、ミュー型とタウ型のニュートリノ振動については理解してくれる。しかし、太陽の中で起こっているニュートリノ振動を理解してもらうには、もう一工夫が必要である。太陽中心で生じた電子型ニュートリノは、表面から出るときにはミュー型ニュートリノに化けてしまう [2]²。そこでは片方の振動のエネルギーが、他方の振動へ移ったまま戻らない、という面白い現象（断熱遷移）が現れる。断熱遷移の理解には、固有振動の概念が必須である。

¹この固有振動の解説は、日本物理学会の許可を得て、「大学の物理教育」会誌の記事 [1] を高エネルギーニュースのために書き直したものである。

²太陽ニュートリノ振動の場合のミュー型ニュートリノとは実はミュー型とタウ型との最大混合であることが分かっている。ここでは簡単のため、電子型からミュー型の転化とする。

このニュートリノ振動と等価な物理を目で見るには、連成振り子を使えばよい。まず、長い方の振り子だけを振らせておく。そのひもの長さをゆっくり短くして、最終的にもう片方の振り子よりも短くする。この過程で、振動のエネルギーは一方から他方へほぼ 100% 移る。

1978 年度ノーベル物理学賞受賞者の S. Weinberg が 1986 年の高エネルギー物理国際会議の講演で「太陽ニュートリノ振動は連成振り子を使って説明できる」と述べ [3, 4]、また自らデモを披露したという話を聞いて、筆者らも連成振り子の模型を作ってみることにした。おもりを動かして振り子の長さを変えられるように、おもりに小型モーターを、そして振り子の軸にベアリングを取り付けた。まずこの模型を紹介してから、固有振動の概念を強調しつつ断熱遷移を説明したい。断熱遷移は、素粒子に限らず、磁性の研究でもよく議論されている重要な概念である [5]。

2 固有振動と単振り子について

固有振動の典型例として単振り子を考える。振り子の振幅が小さい場合にのみ単振動となるのだが、講義の教材としては一番使いやすい。長さ ℓ の振り子の先に質量 m のおもりがついているとき、真下の位置からの変位を x とすると、運動方程式は、 g を重力加速度として

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -mg \sin \frac{x}{\ell} \quad (1)$$

となる。微小な振れ ($|x| \ll \ell$) のとき、

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x \quad \text{ただし } \omega \equiv \sqrt{\frac{g}{\ell}} \quad (2)$$

となる．この一般解は， $x = A \cos(\omega t + \alpha)$ である．このように運動が正弦波で書けるときを，固有振動（調和振動）といい， ω を固有角振動数，角振動数に独立な A を振幅， α を初期位相という．角振動数 ω と周期 T には， $T = 2\pi/\omega$ の関係がある．周期は，長さだけで決まり，質量 m に無関係となる．角振動数 ω と振り子の長さ l の関係式 (2) を図 1 に示した． $l < 30\text{cm}$ では，パイプ (80cm, 45g) の慣性モーメントの効果が効く．簡単のためその補正については述べないが，補正をすると点線のようになりデータを再現できる．また，ここでは振幅は 30 度以下の振れとする．この場合，式 (2) が成り立ち，正弦波でよく近似できる．

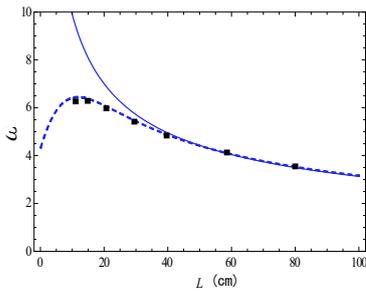


図 1: 角振動数 $\omega = \sqrt{g/l}$ [1/s] と振り子の長さ l [cm] の関係 (実線)．データ点も示した．点線は振り子のパイプの慣性モーメントを考慮した関係．

物理学会誌や大学の物理教育誌にも工夫された連成振動の実験模型が紹介されている [6, 7]．ここでは，振り子模型 [6] に改造を加えることで振動数の変化を可能にした．振り子の長さを変えるための仕組みを図 2 に示した．図 3 はおもりとその上に載ったモータと電池の写真である．図 4 は連成振り子の模式図である．

6V 駆動のマイクロモーター (直径 1.2cmφ, 長さ 5cm, 重さ 30g)[8] の軸に糸を巻き，パイプの直径 (5mmφ) に合わせて，おもりにベアリングシャフト [9] をつけた．断熱遷移では二つの振り子の長さに十分な違いが必要なので，振り子の長さを 80cm にした．また，元の振り子模型の減衰振動を減らすため，ねじればね (2mmφ のステンレス棒) の軸受けに直径 2.0mmφ の玉軸受け [10] をつけた．これにより，摩擦による減衰の大きさを 1/4 に減らせることができ，摩擦なしでの計算との比較が可能になった³．

³減衰の効果は，関係式 (2) に付加項 $-\frac{\Gamma}{l} \frac{dx}{dt}$ をつけて表すことができ，結果として振幅に $\exp(-\frac{\Gamma t}{l})$ が掛かる． $l = 10, 20, 30, 40, 80\text{cm}$ での振幅の測定により， $\Gamma = 0.3$ (cm/s) を得た．図 8 もこの項を入れると $t > 50$ (s) で 10-20%の補正を受け，データとよく合うが，この解説では簡単のため省略する．また，慣性モーメントの影響は図 1 で見たように， $l < 20\text{cm}$ で効果が現れる．その効果は，減衰効果よりも小

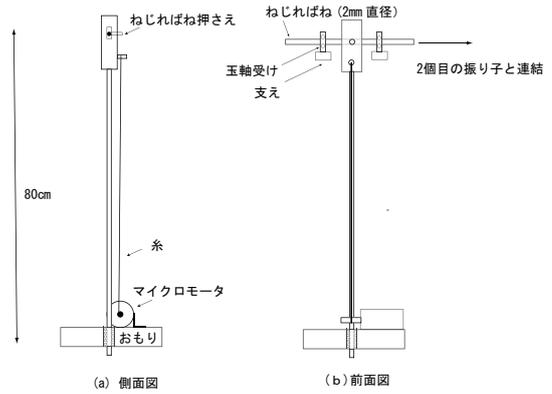


図 2: 振り子の長さを変えるための仕組みを (a) 側面図, (b) 前面図で示した．連成振動の場合は，モータの付いていない振り子が連結される．

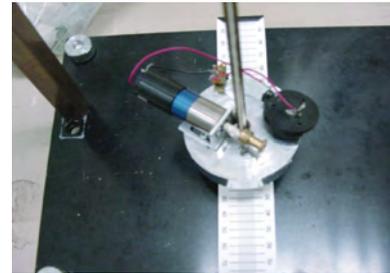


図 3: おもりとその上に載ったモータと電池の写真．

3 連成振り子 — うなりと断熱遷移 —

長さが l_1 と l_2 の二つの振り子を，ねじればねとして働くステンレス棒で連結する．二つの振り子の振れ角度を θ_1 , θ_2 とすると，ステンレス棒に働くモーメントは $c(\theta_2 - \theta_1)$ である．振り子のパイプの重さが無視できるとき，運動方程式は次のようになる．

$$\begin{cases} \frac{d^2\theta_1}{dt^2} = -\frac{g}{l_1}\theta_1 + \frac{c}{ml_1^2}(\theta_2 - \theta_1) \\ \frac{d^2\theta_2}{dt^2} = -\frac{g}{l_2}\theta_2 - \frac{c}{ml_2^2}(\theta_2 - \theta_1) \end{cases} \quad (3)$$

これを，振り子の変位 $x_1 = l_1\theta_1$, $x_2 = l_2\theta_2$ について表すと

$$\begin{cases} \frac{d^2x_1}{dt^2} = -\left(\frac{g}{l_1} + \frac{c}{ml_1^2}\right)x_1 + \frac{c}{ml_1l_2}x_2 \\ \frac{d^2x_2}{dt^2} = \frac{c}{ml_1l_2}x_1 - \left(\frac{g}{l_2} + \frac{c}{ml_2^2}\right)x_2 \end{cases} \quad (4)$$

となる．ここで右辺の係数から成る 2 次正方行列は，マイナス符号をつければ正値対称行列であるので，直交行

さく，以下の議論では省略する．われわれの実験では，これらの効果を避けるため振り子の長さを長くし，また玉軸受けを使うことにより減衰の効果を抑えた．

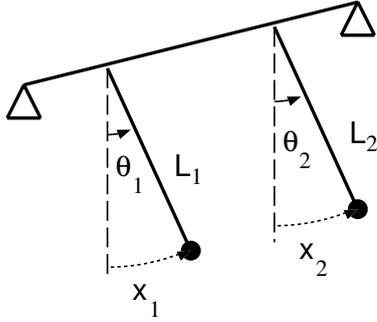


図 4: 連成振り子の模型図 [6]. 図 2 を二つ連結したものを模式的に書いた.

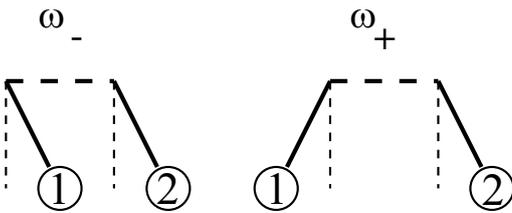


図 5: 二つの固有振動. ω_- の固有振動は, 二つの振り子が全く同じ振動をするモード ($x_1 = x_2$) であり (ω_+ の固有振動は二つの振り子が異符号の振動をするモード ($x_1 = -x_2$) である (右図). $X = (x_1 + x_2)/2 = A \cos(\omega_- t + \alpha)$, $Y = (x_1 - x_2)/2 = B \cos(\omega_+ t + \beta)$ である.

列で対角化できることに注意する. 運動方程式を解くと, 二つの固有角振動数 ω_{\pm} ($\omega_- < \omega_+$) が得られる.

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{1}{2} \left[A + B \pm \sqrt{(A - B)^2 + 4C^2} \right] \quad (5)$$

ただし

$$A \equiv \frac{g}{l_1} + \frac{c}{ml_1^2}, B \equiv \frac{g}{l_2} + \frac{c}{ml_2^2}, C \equiv \frac{c}{ml_1 l_2} \quad (6)$$

以下しばらく, 特に二つの振り子の長さが等しく $l_1 = l_2 = l$ のときを考えよう. 固有角振動数は

$$\omega_- = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \omega_+ = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2c}{ml^2}} \quad (7)$$

となり, 図 5 に示したように, ω_- の場合は二つの振り子がまったく同じ振動をするモード ($x_1 = x_2$) であり, ω_+ の場合は二つの振り子が異符号の振動をするモード ($x_1 = -x_2$) である.

初期条件を $x_1 = x_2$, または $x_1 = -x_2$ になるように設定し, 運動を始めると, それぞれの固有振動を実現で

きる. ω_- の固有振動には, ねじればねは寄与しないので, 単振り子の固有振動と同じ固有振動数を持つ. ω_+ の固有振動数は, ねじればねの寄与分だけ ω_- より高くなる.

ここで, 実験のパラメータを示す: $m_1 = m_2 = 0.385 \text{ kg}$, $c = 0.174 \text{ Nm}$. 振り子 ($l = 0.8 \text{ m}$) の復元力を示す $g/l = 12.3 \text{ s}^{-2}$ に対して, 振り子間のねじれ棒の強さを表す c/ml^2 は, 0.71 s^{-2} である. つまり, 振り子間のばねの強さはそれぞれの振り子の復元力に比べて 1 桁小さい.

連成振り子の一般的な運動は, 二つの固有振動の重ね合わせであり

$$\begin{cases} x_1 = A \cos(\omega_- t + \alpha) + B \cos(\omega_+ t + \beta) \\ x_2 = A \cos(\omega_- t + \alpha) - B \cos(\omega_+ t + \beta) \end{cases} \quad (8)$$

と与えられる. 第 1 項が ω_- の固有振動であり, 第 2 項が ω_+ の固有振動である.

たとえば, 二つの振り子のうち片方の振り子を最初に振らせると, 「うなり」が実現する. つまり, $t = 0$ での初期値を

$$x_1 = x_0, x_2 = 0, \frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_2}{dt} = 0$$

とすると, 一方の振り子の振動が小さな結合を通して一定の周期で他方の振り子の振動に完全に移り, また同じ周期で戻り, 振動が行ったり来たりする. 解

$$\begin{cases} x_1 = \frac{x_0}{2} (\cos \omega_- t + \cos \omega_+ t) \\ = x_0 \cos \frac{\omega_+ + \omega_-}{2} t \cdot \cos \frac{\omega_+ - \omega_-}{2} t, \\ x_2 = \frac{x_0}{2} (\cos \omega_- t - \cos \omega_+ t) \\ = -x_0 \sin \frac{\omega_+ + \omega_-}{2} t \cdot \sin \frac{\omega_+ - \omega_-}{2} t \end{cases} \quad (9)$$

の様子を図 6 に示した. うなりを観測することで, ねじればねの強さや ω_+ を正確に測ることができる. ω_- は単振り子の角振動数 3.5 (1/s) に等しいはずなので, 計算できる. うなりの周期は, $T = 2\pi/(\omega_+ - \omega_-)$ のはずで比較的長く測定しやすい. 今の場合, これは 32 秒であり, ストップウォッチを使い 10 回程度の平均を測定すれば約 0.2 秒の正確さで測定できる. そうすれば, $\omega_+ = \omega_- + 2\pi/T = 3.70 \text{ (1/s)}$ を正確に計算できる.

いままで $l_1 = l_2$ の場合を考えてきたが, 次に, 二つの振り子の長さがかなり違う場合, 例えば, $l_1 \gg l_2$ の場合を考えると

$$\omega_- \simeq \sqrt{\frac{g}{l_1}}, \quad \omega_+ \simeq \sqrt{\frac{g}{l_2}} \quad (10)$$

となり, その固有振動は, それぞれが独立に振れている場合に近い. 実際は, ω_- の固有振動では, 主に振れるのは長い振り子 1 だが, 振り子 2 も同じ方向に小さく振れている. ω_+ の固有振動では, 短い振り子 2 が主に振れており, 振り子 1 は逆方向に小さく振れている.

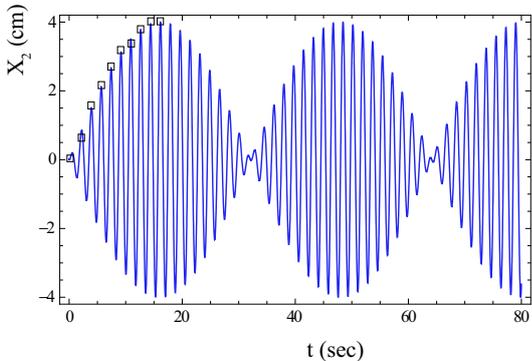
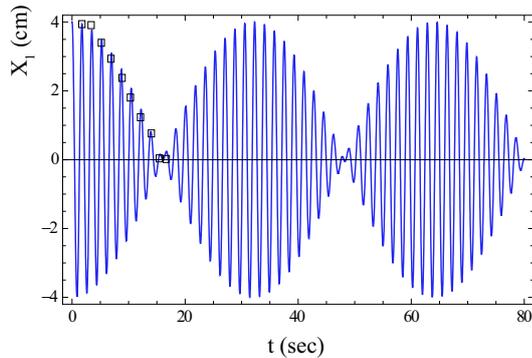


図 6: うなり — 同じ長さ二つの振り子 $l_1 = l_2 = 80\text{cm}$ のうち片方の振り子を最初に振らせた場合の振り子の変位 $x_1 = \ell\theta_1$ (cm), $x_2 = \ell\theta_2$ (cm) の計算値と測定点 (四角) . 測定誤差は 0.2cm 程度.

4 断熱遷移

まず, 単振り子の振動で, 系をゆっくり変化 (断熱変化) させることを考える. たとえば, 振り子の糸をゆっくり短く, または長くする. この時, 固有振動のエネルギー E は,

$$E/\omega = \frac{1}{2}m\omega A^2 = J \quad (\text{一定}) \quad (11)$$

の関係を満たしながら E と ω がともに変化する. 系の変化が振動の周期に比べてゆっくりならば, J は一定に保たれる. これを断熱不変定理という. 微小振動する力学系は, 一般にいくつかの固有振動の和として記述でき, 断熱不変定理はそれぞれの固有振動のエネルギーと振動数について成り立つ. 単振り子では, 式 (2) により角振動数は $\omega = \sqrt{g/\ell}$ なので, 断熱変化のもとで, 振幅 A は $\ell^{1/4}$ に比例して変化する. それを示したのが, 図 7 である.

量子力学の確立の過程で, 断熱不変定理は重要な役割を果たした. この量子力学の歴史については, 朝永振一郎の「量子力学 I」に詳しい解説がある [11].

次に, 連成振り子の断熱変化を考える. 最初に $l_1 = 80\text{cm}$, $l_2 = 40\text{cm}$ として, 振り子 1 だけを振らす. そし

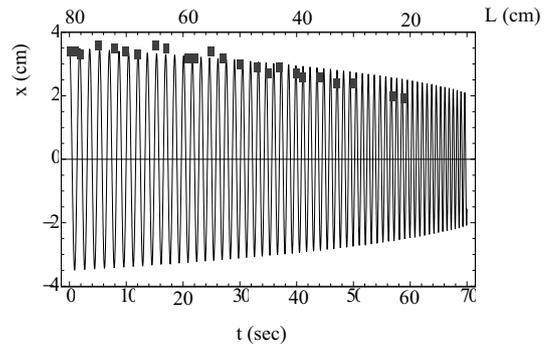


図 7: 単振り子で振り子の長さ ($\ell = 80\text{cm}$ から 20cm まで) を変えたときの変位 x . データ点も示した. 断熱不変定理が正しいと, 振幅はほぼ $\ell^{1/4}$ に比例して減少する. $t > 50$ 秒でデータ点が計算より少し低いのは減衰効果である.

て, 振り子 1 の長さを, $l_1 = 80\text{cm}$ から 10cm までゆっくり短くするとどうなるか考える. 方程式 (3) を初期条件:

$$\theta_1 = \frac{4\text{cm}}{80\text{cm}} [\text{rad}], \theta_2 = 0, \frac{d\theta_1}{dt} = \frac{d\theta_2}{dt} = 0$$

の下に数値的に厳密に解くと, 図 8 のようになる. 横軸は時間 [s] であり, 縦軸は振れ $x_1 = l_1\theta_1$, $x_2 = l_2\theta_2$ [cm] を表す. 振り子 1 の長さは 1 秒に約 1cm の割合で短くした⁴. 最初は振り子 1 が振れており, 1 つの振り子の長さを短くした場合の図 7 のように変化して行く. しかし, l_1 が 40cm に近くなるに従い, 振り子 2 の振幅が大きくなり, ついには振り子 2 がほとんどのエネルギーを受け取り, 振り子 1 は長さが 30cm より短くなるとあまり振動しなくなってしまう.

これは, 固有振動の考え方をすると次のように説明できる. 方程式 (4) から得られる二つの固有角振動数 ω_-, ω_+ を振り子 1 の長さ l_1 の関数として図 9 に表した. そのときの振り子の様子を図 10 に示した. これを図 1 の単振り子の場合と比べて頂きたい. l_1 が 80cm から短くなる時, 固有角振動数の小さい方 ω_- は, 図 1 の様に増加して行くが, 40cm より短くなるとほぼ一定の値をとる. 一方, 固有角振動数の大きい方 ω_+ は, l_1 が 80cm から 40cm まではほぼ一定 ($l_2 = 40\text{cm}$ に対応する単振り子の固有角振動数) であるが, l_1 がさらに短くなると, 図 1 に従って大きくなる. 二つの固有角振動数の曲線は $l_1 = l_2 = 40\text{cm}$ の位置で「交差しない». ここで断熱不変の公式 (11) を思い出そう. 振り子 1 だけが振動している状態で出発するならば, この系はほぼ ω_- の固有振動

⁴振り子の長さが変わる速さは断熱的であればよい. 2 倍の 2cm/s でもこの議論は変わらない.

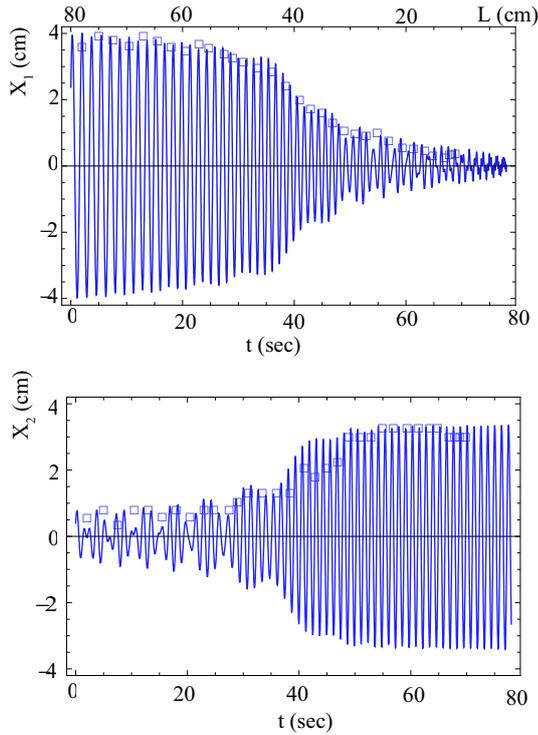


図 8: 最初に振らせた振り子 1 の長さを, $\ell_1 = 80$ cm から 10 cm までゆっくり短くした時 (断熱遷移) の振り子 1 と 2 の変位 (x_1, x_2). 振り子 2 の長さは $\ell_2 = 40$ cm のまま. 四角は目で観測したデータ点である. 測定誤差は 0.4 cm 程度.

をしていると考えてよい. ω_+ の固有振動は小さい. それぞれの固有振動のエネルギーは式 (11) を満たす. つまり, $E_+/\omega_+ = J_+ \sim 0 \ll E_-/\omega_- = J_-$ である. そして図 9,10 の (1) に沿って時間が進む. 実際に, $\ell_1 = 40$ cm の近くでは, ω_- の固有振動であるため, 二つの振り子は同じ向きに振動することが観測される. もし初期条件が, $\theta_1 = 0, \theta_2 = 4 \text{ cm}/40 \text{ cm}, \frac{d\theta_1}{dt} = \frac{d\theta_2}{dt} = 0$ ならば, 図 9,10 の (2) を辿って時間が進む. そして, それぞれの振れは, 図 8 で時間 $t = 80$ s から逆に進んだ図になる. この場合, $\ell_1 = 40$ cm の近くでは, ω_+ の固有振動であるため, 二つの振り子は逆向きに振動することが観測される.

5 ニュートリノ振動におけるうなりと断熱遷移

1998 年にスーパーカミオカンデ実験は, ミュー型ニュートリノが振動により減っていることを発見した. この大気ニュートリノ振動を簡単のためミュー型ニュートリノとタウ型ニュートリノの間の振動とすると, ミュー型ニュートリノとタウ型ニュートリノは長さの等しい連成振り子

固有角振動数(1/s)

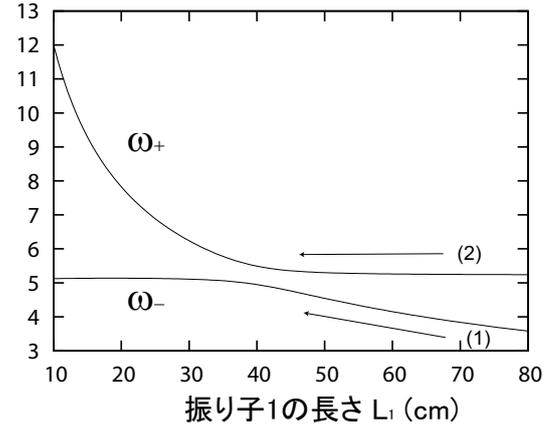


図 9: 振り子 1 の長さ ℓ_1 を変えたときの二つの固有角振動数 ω_- と ω_+ . 振り子 2 の長さは, $\ell_2 = 40$ cm で固定している. この場合, (1) の経路は (2) と交差しないうなりに注意する.

に対応し, 質量の小さな差が弱いばねによる固有振動数の差に対応する. 二つのニュートリノ間の振動はうなりに対応する.

さらに 2002 年には, スーパーカミオカンデ実験とスノー実験により, 太陽の中心で核融合の際に発生する電子型ニュートリノが, 別の型のニュートリノに転換していることが報告された. これは 1960 年代末から 30 年にわたって R. Davis によって得られていた実験結果を裏付けるものであった⁵. この太陽ニュートリノ振動では, 断熱遷移が起きている.

大気ニュートリノ振動と太陽ニュートリノ振動の二つを, 前節で見た連成振り子に対応させて議論しよう. まずミュー型ニュートリノとタウ型ニュートリノの間の振動について考える. ミュー型ニュートリノとタウ型ニュートリノの波動関数を Ψ_μ, Ψ_τ とすると, これらは次のようなシュレディンガー方程式

$$\begin{cases} i\hbar \frac{d\Psi_\mu}{dt} = E\Psi_\mu + a\Psi_\tau \\ i\hbar \frac{d\Psi_\tau}{dt} = a\Psi_\mu + E\Psi_\tau \end{cases} \quad (12)$$

を満たす. ここで, E は二つの固有状態の平均のエネルギーであり, a が混合の程度を表す. この方程式は $\ell_1 = \ell_2$ の場合の式 (4) と同じ形をしており, 解は

$$\begin{cases} \Psi_\mu = A e^{-i\omega_- t} + B e^{-i\omega_+ t} \\ \Psi_\tau = A e^{-i\omega_- t} - B e^{-i\omega_+ t} \end{cases} \quad (13)$$

のように, エネルギー固有解の重ね合わせとして与えられる. エネルギー固有値は $E_\pm = \hbar\omega_\pm = E \pm a$ である.

⁵Davis はこの業績により 2002 年度ノーベル物理学賞を受賞した. 日本の小柴昌俊氏, アメリカの Giacconi との同時受賞である.

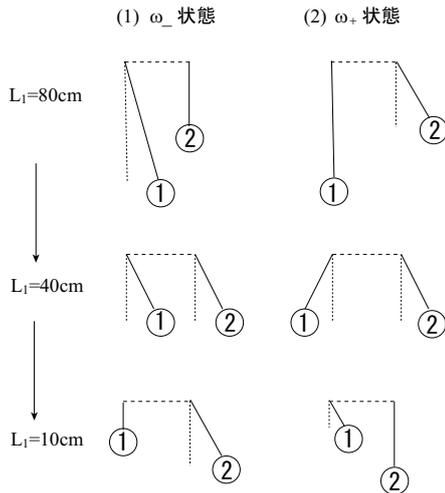


図 10: 図 9 の (1), (2) に沿って, ω_-, ω_+ の固有振動を励起するとどうなるか, を図示したもの.

最初 $t = 0$ でミュー型ニュートリノである場合, $\Psi_\mu = 1, \Psi_\tau = 0$ であり, 解は次のようになる.

$$\begin{cases} \Psi_\mu = (e^{-i\omega_- t} + e^{-i\omega_+ t})/2 \\ \Psi_\tau = (e^{-i\omega_- t} - e^{-i\omega_+ t})/2 \end{cases} \quad (14)$$

波動関数 Ψ_μ, Ψ_τ の絶対値の 2 乗が任意の時間 t でそれぞれミュー型ニュートリノとタウ型ニュートリノである確率を表す. 連成振動子の場合と同じく, 二つの状態間に「うなり」が起こり, 周期的にミュー型ニュートリノとタウ型ニュートリノとの間で振動を起こす.

つぎに電子型ニュートリノとミュー型ニュートリノの間の断熱遷移について考えよう [12, 2]. 太陽の中心は, 重力により圧縮されているので, 高密度, 高温の状態にある. 太陽中心で, 4 個の陽子が 1 個のヘリウム原子核に変わる核融合反応によって, 太陽エネルギーは生じる. その際, 26.7 MeV のエネルギーと共に 2 個の電子型ニュートリノが発生する. 太陽中のニュートリノは, 一般に電子型とミュー型の混合状態にあり, 電子型の波動関数を Ψ_e , ミュー型の波動関数を Ψ_μ とすると, シュレディンガー方程式

$$\begin{cases} i\hbar \frac{d\Psi_e}{dt} = (E - a \cos 2\theta + A(r))\Psi_e + a \sin 2\theta \Psi_\mu \\ i\hbar \frac{d\Psi_\mu}{dt} = a \sin 2\theta \Psi_e + (E + a \cos 2\theta)\Psi_\mu \end{cases} \quad (15)$$

が成り立っている. ここで $A(r)$ は, 中心から r 離れた場所で高い電子密度によって生じるポテンシャルエネルギーであり, 電子型ニュートリノにしか働かない. 先程のミュー型とタウ型の間の振動の方程式 (12) は, この式で混合角 $\theta = 45^\circ$, かつ $A(r) = 0$ (真空) とした場合で

ある. 電子型とミュー型の場合の混合角は, 実は 45° ではなく 33° である. 太陽中心では密度に比例する $A(r = 0)$ が $2a \cos 2\theta$ よりずっと大きいため, 式 (15) の固有角振動数 ω_+ の固有状態 Ψ_+ は, $\Psi_+ \simeq \Psi_e$ である. つまり, 質量が小さいにも関わらず, 高い電子密度のせいで, エネルギーの高い固有状態は電子ニュートリノの状態である. ニュートリノはほぼ光速で太陽の外に向かって運動する. このとき $A(r)$ は徐々に減少し, 最終的にニュートリノが太陽の表面から出るときには, $A(r) = 0$ となる. この変化は断熱変化と考えられる. 断熱不変定理 (11) により, ニュートリノは固有エネルギーの高い状態にいつづければならない. その $A(r) = 0$ での固有状態は, 波動関数 $\Psi_+ = \Psi_e \sin \theta + \Psi_\mu \cos \theta$ で表される質量の大きいニュートリノの状態にあるはずである. このエネルギーの固有状態は地球に到達するまで保たれる. Davis の実験や水チェレンコフ検出器のように, 電子型ニュートリノとのみ反応する実験装置⁶の場合は, Ψ_+ のうちの電子ニュートリノの成分 Ψ_e としか反応しないので, 反応確率 $|\langle \Psi_+ | \Psi_e \rangle|^2$ は太陽中心での 1 から $\sin^2 \theta \simeq 1/4$ へと減少する. これが, 1968 年に Davis が報告した「太陽ニュートリノ問題」の説明である. これがほぼ 40 年間未解決であったのも無理はない. 最終的な決着は, 2002 年のスーパーカミオカンデ実験, スノー実験およびカムランド実験の結果を待たねばならなかった [2]⁷. $e\mu$ および $\mu\tau$ 間のニュートリノ振動が存在するのみならず, $A(r)$ がニュートリノの質量 2 乗差 $2a \cos 2\theta$ に等しくなる共鳴点が太陽内に存在したとは, 自然のいたずらと言うしかない. 図 11 に太陽中でのニュートリノのエネルギーに対する固有値を密度の関数として模式的に示した. $\rho =$ 大 ($\rho = 0$) が太陽中心 $r = 0$ (太陽表面 $r = R_\odot$) に対応する.

断熱遷移は, ニュートリノに限らず, たとえば分子磁性体でも, 実現されているようである [5]. 分子磁性体は, 磁気能率 (スピン) を持った分子で構成されている. 各々の分子磁性は, 互いに, ほぼ孤立しているため, それらの分子磁性を, 独立な少数自由度の量子力学系とみなすことができる. その固有状態を, 連成振動子の固有モードと同一視すれば, 古典力学と同様の議論を進めることができる. スピンは磁場と結合しているため, 磁場を適当に掃引することで (非)断熱遷移を引き起こすことができる. すなわち, 磁場をゆっくり掃引すると, スピンは, 磁場に追従する (断熱遷移) が, 非常に速く掃引すると, スピンは, 元々の向きを保持し続ける (非断熱遷移). 図 9 で, (1),(2) の経路が断熱遷移では交差せず, 非

⁶水チェレンコフ検出器では中性カレントも寄与するが, 小さい.

⁷断熱遷移による理論的な解釈は, Mikheyev と Smirnov による. 彼らの仕事は Wolfenstein の仕事に基づいているので, 断熱遷移は MSW 効果と呼ばれている.

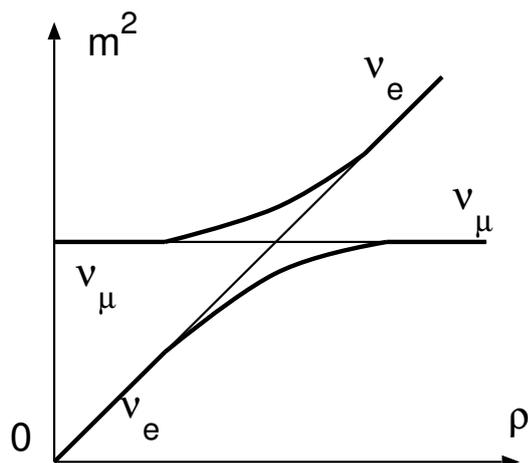


図 11: 太陽中でのニュートリノのエネルギーに対する固有値を密度の関数として模式的に図示したもの。二つの固有状態は断熱遷移では交差しない。実際の電子密度 ρ の値は太陽中心で約 $100N_A/cm^3$ (N_A はアボガドロ数) である。

断熱遷移では交差しうることを意味する。

6 まとめ

拘束された運動は、微小であるかぎり調和振動になる。調和振動は、それをいくつかの固有振動に分解することによって理解できる。ここでは、固有振動のあらわれとしてうなりや断熱遷移の現象が理解できることを見た。これらの現象は普遍的で、古典力学の適用されるマクロな世界だけでなく、原子・分子・素粒子のミクロな世界にも登場する。固有振動は、古典力学・量子力学のどちらにとっても、もっとも単純でかつ重要な概念である。

この記事は初めにことわったように「大学の物理教育」に掲載された解説を転載・加筆したものである。高エネルギーニュースの読者には初等的過ぎるかもしれないが、院生および学部生の教育または専門外の人々の啓蒙に役立てて頂けると幸いである。

参考文献

- [1] 作田 誠, 西山 由弘, 園田 英徳, 「固有振動と断熱遷移についての教育」, 大学の物理教育誌, 2008 年 Vol.14 No.1, 36-41.
- [2] 中畑雅行, 鈴木洋一郎, 日本物理学会誌 解説 2003 年第 58 巻 4 号, 337-342; H. A. Bethe, Phys. Rev. Lett. **56** (1986) 1305-1308.

- [3] S. Weinberg, Int.J.Mod.Phys.A2,301 (1987). 1986 年に Weinberg が, この Berkeley で行われた高エネルギー国際会議のまとめ (Summary and Outlook) の中で, Berkeley での講義でデモンストレーションをしたという短いコメントがある。音叉を使ったということであるが詳細は不明。
- [4] J.N.Bahcall, Neutrino Astrophysics, Cambridge University Press (1989).
- [5] 宮下精二, 日本物理学会誌 解説 1998 年第 53 巻 4 号, 259-265; S. Miyashita, J. Phys. Soc. Jpn. **64** (1995) 2734.
- [6] 際本泰士, 連成振動の実験道具, 日本物理学会誌 物理の小道具 2006 年第 59 巻第 11 号, 806-808.
- [7] 増田健二, 大学の物理教育 1999-3 号, 44-49. 松本節子, 大学の物理教育 2002-1 号, 31-35.
- [8] 光進電気工業 DC マイクロモータ 1224-012S (遊星ギア)。
- [9] THK リニアプッシュLM5。
- [10] NTN ミニアチュア玉軸受け開放型内径 2.0mm ϕ 。
- [11] 朝永振一郎, 「量子力学 I」みすず書房。
- [12] B.Kayser, Review of Particle Physics, Phys.Lett.B592, 145-153,2004.