

## ■ 研究紹介

# サブミクロン分解能での超冷中性子の重力による束縛状態の観測

東京大学大学院理学系研究科

市川 豪

ichikawa@icepp.s.u-tokyo.ac.jp

2013年(平成25年)8月19日

## 1 はじめに

### 1.1 超冷中性子

速度の遅い中性子は、波長が長いため物質の原子核ポテンシャルの形を直接感じることはできず、空間平均した実効的なフェルミポテンシャル ( $\sim 100$  neV) を感じることになる。フェルミポテンシャル  $V$ , 中性子の運動エネルギー  $E$ , 入射角  $\theta$  に対して、

$$E \sin^2 \theta \leq V \quad (1)$$

を満たすとき、中性子は物質表面で鏡面反射する。この式から、100 neV 以下程度のエネルギーを持つ中性子は、あらゆる入射角に対して鏡面反射することになる。そのような中性子は超冷中性子 (UCN) と呼ばれ、フェルミポテンシャル、重力ポテンシャル (100 neV/m)、磁場ポテンシャル (60 neV/T·m) によって束縛することが可能で、様々な実験に利用されている。

### 1.2 重力による束縛状態

地球による重力は、日常生活においてもっともありふれた力であり、地球重力によって束縛された量子状態は、興味を引く題材として以前から教科書に取り上げられてきた [1]。この量子状態がはじめて観測されたのは、2002年、V. V. Nesvizhevsky らの超冷中性子を用いた実験によってである [2]。

床と重力からなるポテンシャルを古典力学的に扱おうと、超冷中性子は床の上でバウンドを繰り返すことになる。量子力学における振る舞いは、シュレディンガー方程式に重力と床によるポテンシャル

$$V(z) = \begin{cases} \infty & (z \leq 0) \\ mgz & (z > 0) \end{cases} \quad (2)$$

を代入することで得られる。ここで、 $m$  は中性子質量、 $g$  は重力加速度、 $z$  は高さである。波動関数に対する境

界条件、 $\psi(0) = 0, \lim_{z \rightarrow \infty} \psi(z) = 0$  を課すことで解くことができ、その解は Airy 関数  $\text{Ai}$  を用いて、

$$\psi(z) = a \text{Ai} \left( \frac{z}{z_0} - \frac{E}{E_0} \right) \quad (3)$$

と書かれる。ここで、 $a$  は規格化定数、 $z_0$  と  $E_0$  はこの系の典型的な長さとしてエネルギーであり、中性子に対してそれぞれ、 $z_0 = (\hbar^2 / (2m^2g))^{1/3} \sim 5.87 \mu\text{m}$ ,  $E_0 = (mg^2\hbar^2/2)^{1/3} \sim 0.602$  peV となる。中性子の重力による束縛状態の存在確率分布 (波動関数の絶対値二乗) と固有エネルギーは、図1のようになる。存在確率分布が高さ方向にモジュレーションを持っていることが分かる。重力による量子状態を詳細に観測することで、この種の実験結果は、重力の逆二乗則 [3]、等価原理の検証 [4] に利用することができる。

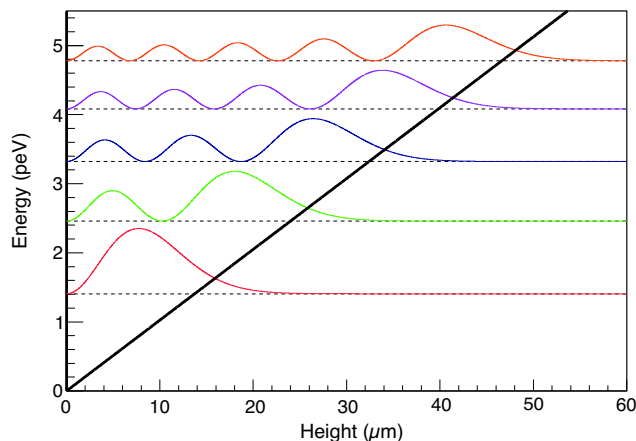


図1: 重力による束縛状態のはじめの5つの準位の、存在確率分布と固有エネルギー。黒の太線はポテンシャルを表す。

## 2 実験装置

重力による束縛状態の位置分布を観測しようとする実験は、既存の中性子検出器の分解能 ( $\sim$  数  $\mu\text{m}$ ) によつ

て制限されてきた。われわれは、この制限を越えるために新しい測定器システムを開発し、2011年にフランス、グルノーブルのラウエ-ランジュバン研究所 (ILL) において実験を行った。

## 2.1 実験装置の概要

開発した測定器システムを図2に示す。この測定器システムは、三つの主要な部分から構成されている [5]。入射した超冷中性子は、高さ方向に  $100\ \mu\text{m}$  の狭いガラス製のコリメーティングガイドの中で、重力による束縛状態に遷移する。このガイド内で、天井にぶつかるような垂直方向に高いエネルギーを持つ中性子は取り除かれる。生き残った中性子を、拡大ロッドの円筒面が凸面鏡のように反射し、分布を拡大する。そして、25倍程度に拡大された分布を、超冷中性子用ピクセル検出器によって検出する。これらを組み合わせることによって、サブミクロンの分解能を達成するように設計した。この系の詳細な物理的過程については、後述する。

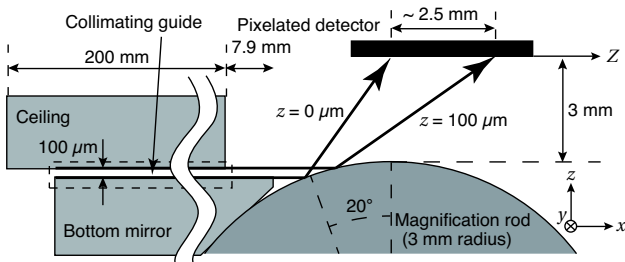


図 2: 測定器システム主要部分の概要図。

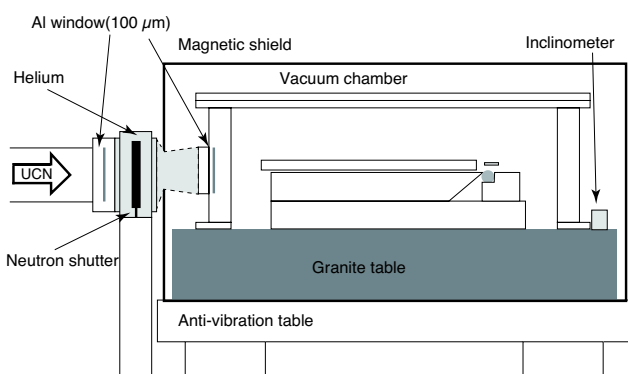


図 3: 測定器システム全体の概要図。

図3のように、測定器システムを中性子と空気との散乱を避けるために真空容器に入れた。上流からの振動を防ぐためビームパイプと真空容器は切り離し、両者のあいだの空間に散乱長の長いヘリウムを充填した。ピクセル検出器の読み出し中は超冷中性子を遮る必要があるため、中性子を吸収する Cd を用いたシャッターを設置し

た。外部磁場と振動の影響を減らすために、真空容器を防磁シールドで覆い、アクティブ防振台と石定盤の上に置いた。全体の水平性を確認するために傾斜センサを設置した。

## 2.2 超冷中性子源

ILL は世界最高強度の、強度が時間に対して一様な超冷中性子源を持っている [6]。われわれの実験は、ILL の UCN PF2 ビームラインで行われた。超冷中性子の水平方向の速度分布を、中性子用チョッパーを用いて飛行時間を測定した結果から算出した。速度分布は図4のような、ガウシアンに近い分布で、その平均値は  $9.4\ \text{m/s}$ 、標準偏差は  $2.8\ \text{m/s}$  であった。

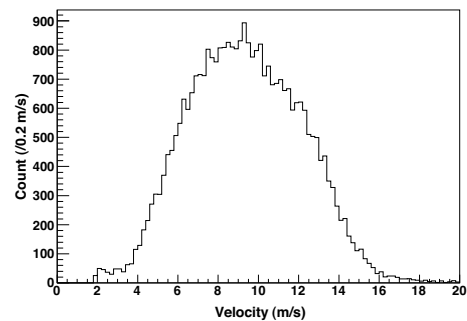


図 4: 超冷中性子の水平方向速度分布。

## 2.3 コリメーティングガイド

ガラスのフェルミポテンシャルより小さい運動エネルギーを持つ超冷中性子は、コリメーティングガイドの内部で束縛される。コリメーティングガイドの写真を図5に示す。鉛直方向に高いエネルギーを持つ準位は明瞭なモジュレーションを持たず、観測の妨げになるため、粗さを持つ天井によって取り除く。天井に、京大原子炉実験所の真空蒸着槽を用いて [7]、中性子吸収体である Gd-Ti-Zr の合金 (54%, 35%, 11%) を蒸着した。中性子を取り除く過程を古典的に描写すると、図6のようになる。天井に届くエネルギーを持つ中性子は、粗さを持つ天井に衝突し、水平方向の速度が鉛直方向の速度に変換されて、天井・床との反射回数が増大し、天井の吸収体によって吸収されるか運動エネルギーを得てガイドの外へ失われる。なめらかな床 (粗さ  $Ra = 0.03\ \mu\text{m}$ ) と粗さを持つ天井 (粗さ  $Ra = 0.4\ \mu\text{m}$ ) のガラス表面を、レーザー顕微鏡で測定した結果を図7に示す。算術平均粗さ  $Ra$  は、表面を測定する方向  $x$ 、測定する長さ  $l$ 、測定した表面の高さ  $f(x)$  を  $\int_0^l f(x)dx = 0$  としたとき、 $Ra = \frac{1}{l} \int_0^l |f(x)| dx$  で定義される。

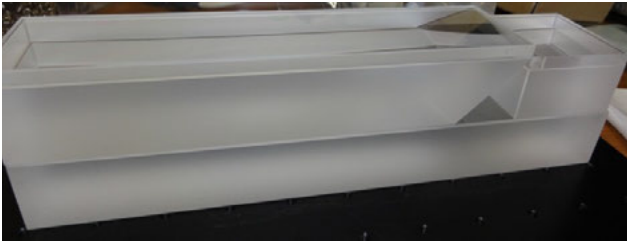


図 5: ガラス製のコリメーティングガイド。

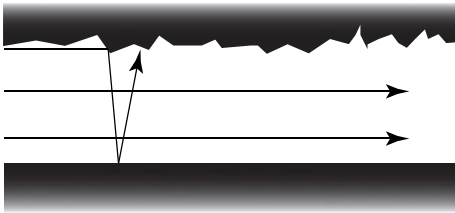
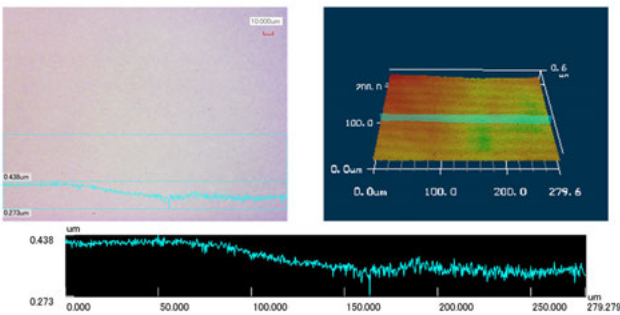
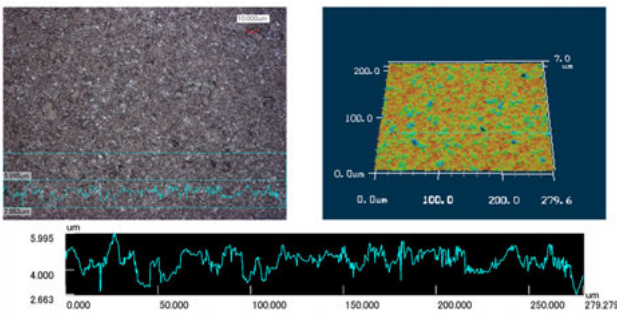


図 6: 超冷中性子除去の古典的描像。



粗さ  $Ra = 0.03 \mu\text{m}$



粗さ  $Ra = 0.4 \mu\text{m}$

図 7: コリメーティングガイドのガラス表面。

## 2.4 拡大ロッド

コリメーティングガイド出口での超冷中性子の高さ分布を、拡大ロッドによっておよそ 25 倍に拡大する (図 2)。拡大ロッド周りの写真は、図 8 に示す。床の端の斜面は  $45^\circ$  の角度を持っており、拡大ロッドと接している。反射可能な中性子の速度領域を大きくするため、円筒に対して浅い角度で入射する設計になっている。拡大

ロッドの断面図は図 9 のようになっていて、安定して設置するため、半径 3 mm の円柱の側面を平らに削った形をしている。

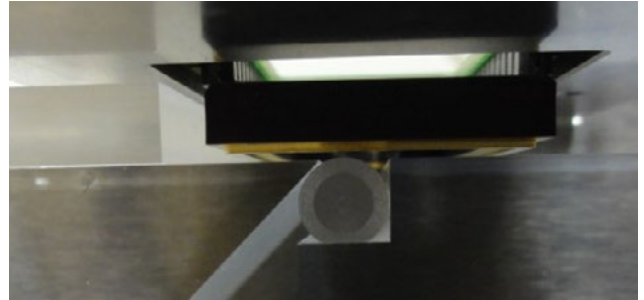


図 8: 拡大ロッド周りの配置の写真。ガイド端部、拡大ロッド、ピクセル検出器。

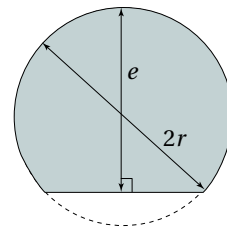


図 9: 拡大ロッドの断面図。奥行き方向は 50 mm。半径は  $r = 3 \text{ mm}$  で、 $e = 5.5 \text{ mm}$  となるように削ってある。

拡大ロッドの作製はクリスタル光学によって行われ、表面研磨は大阪大学超精密科学研究センターによって行われた。精密に研磨されたガラス表面に、より速度の大きい超冷中性子を反射可能なようにニッケル (245 neV) を蒸着して表面ポテンシャルを高めた。ニッケルを蒸着したことで、図 4 の速度分布のほぼすべての超冷中性子を反射することが可能となった。水平に飛んできた中性子のガイド内での高さ、反射可能な速度のグラフを図 10 に示す。ガラス表面とニッケル蒸着後の表面のプロファイルを図 11 に示す。ニッケル蒸着後も、粗さ ( $Ra = 2.0 \text{ nm}$ ) は超冷中性子の波長 ( $\sim 100 \text{ nm}$ ) より十分小さく、理想的な円柱面として扱うことができる。

水平方向の速度にばらつきがあるため、図 12 のように、ガイド内を水平に同じ高さで飛んできて拡大ロッドで反射されたとしても、重力の影響でピクセル検出器上の異なる位置で検出されることになる。図 4 の速度分布を使って計算すると、これによる誤差は  $0.1 \mu\text{m}$  程度以下であると見積もられた。

## 2.5 超冷中性子用ピクセル検出器

高い分解能を持つ中性子用二次元位置検出器として、CCD をベースとしたピクセル検出器を開発した。使用

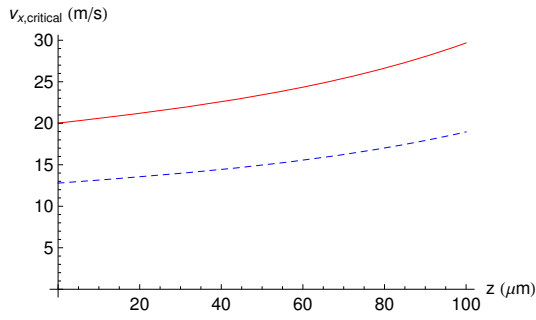
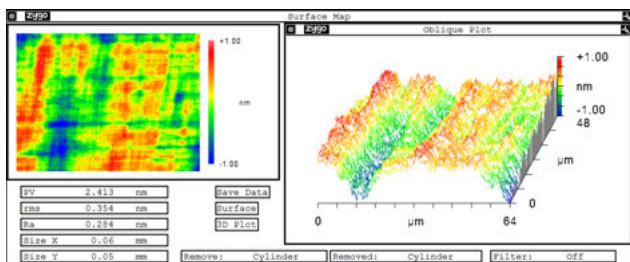
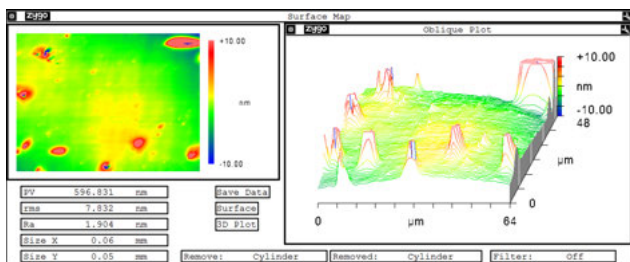


図 10: ガイド内を水平に飛んできた中性子の高さ ( $z$ ) と、その高さで拡大ロッドで反射可能な水平方向速度 ( $v_{x,critical}$ )。(青) 点線がガラス表面のとき、(赤) 実線がニッケル蒸着面のとき。



ロッドのガラス表面 (粗さ  $R_a = 0.3 \text{ nm}$ )



Ni を蒸着したロッドの表面 (粗さ  $R_a = 2.0 \text{ nm}$ )

図 11: 拡大ロッドの表面。

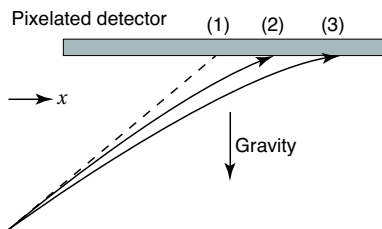


図 12: 水平方向速度のばらつきによる検出位置への誤差の模式図。(1) は重力の影響を無視した場合。速度  $v_{x,slow} < v_{x,fast}$  として、(2) は速度  $v_{x,fast}$  のとき、(3) は速度  $v_{x,slow}$  のとき。

したのは浜松ホトニクス製裏面入射型 CCD S7030-1008 である (図 13)。そのカタログスペックを、表 1 にまとめた。

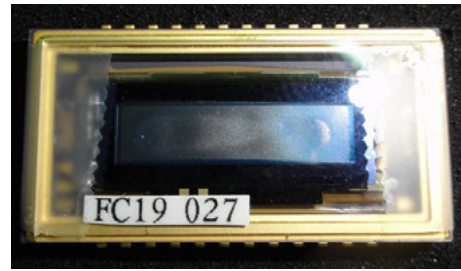
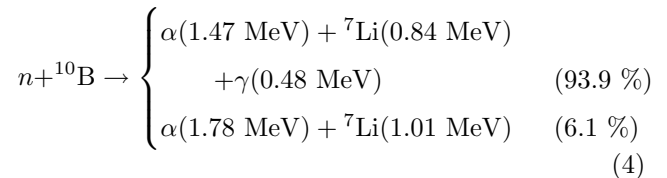


図 13: 使用した CCD, S7030-1008 の外観。前面はガラスで保護されていて、中性子検出に使用するときには取り外す。

表 1: 浜松ホトニクス C7030-1008 のスペック表。V と H は CCD の構造上定義された縦横の方向で、実験での高さ方向に相当するのは V。

| パラメータ         | 値 ( $T_a = 25 \text{ C}^\circ$ ) |
|---------------|----------------------------------|
| 有感面積          | 24.576 mm × 6.000 mm             |
| ピクセル数         | 1044(H) × 256(V)                 |
| ピクセルサイズ       | 24 μm × 24 μm                    |
| ポテンシャル (V)    | 320 ke <sup>-</sup>              |
| ポテンシャル (H)    | 1000 ke <sup>-</sup>             |
| 暗電流 (typ.)    | 100 e <sup>-</sup> /pix          |
| 読み出し雑音 (typ.) | 8 e <sup>-</sup> rms             |

CCD で中性子を検出するために、中性子を荷電粒子に変換する  $^{10}\text{B}$  のコンバータ薄膜を、京大炉の真空蒸着槽を用いて検出面直上に蒸着した。コンバータは、Ti 20 nm-  $^{10}\text{B}$  200 nm-Ti 20 nm のサンドイッチ構造とした。Ti は中性子に対して負のポテンシャル ( $\sim -50 \text{ neV}$ ) を持つ。Ti は安定した薄膜を形成するため、外部の環境から  $^{10}\text{B}$  層を守るために蒸着した。 $^{10}\text{B}$  は中性子との核反応



により、ほぼ正反対方向に二つの荷電粒子を放出する。そのうちのどちらかが CCD に入射し、検出される (図 14)。ILL の PF2 ビームラインの超冷中性子に対する検出効率は、44.1% と測定された [8]。

中性子からのシグナルは CCD 上で二次元のクラスタとして検出される。暗電流を時間平均して差し引いたあとの典型的なデータを図 15 に示す。ピーク位置を中心とした  $7 \times 7$  ピクセルの範囲をクラスタとして定義する。クラスタのヒストグラムの総和 (電荷和) は入射した荷電粒子のエネルギーに相当し、ヒストグラムの重心位置

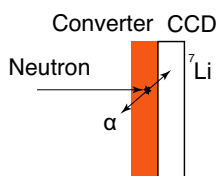


図 14: 中性子が荷電粒子に変換され, CCD によって検出される模式図。

は中性子の入射位置をよく近似する。中性子由来の, クラスターのヒストグラムの総和は, 図 16 のような分布を作る。この分布の各ピークは, 核反応によって作られた荷電粒子のエネルギーに対応している。暗電流のふらつきに由来するピークを取り除くため, ADC の値が 3000 以上のクラスターを中性子由来のイベントとして解析に使用した。

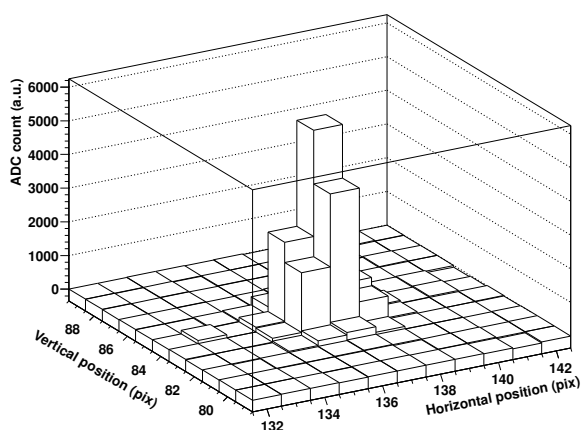


図 15: 中性子との核反応による,  $\alpha$  (1.47 MeV) からのシグナル。

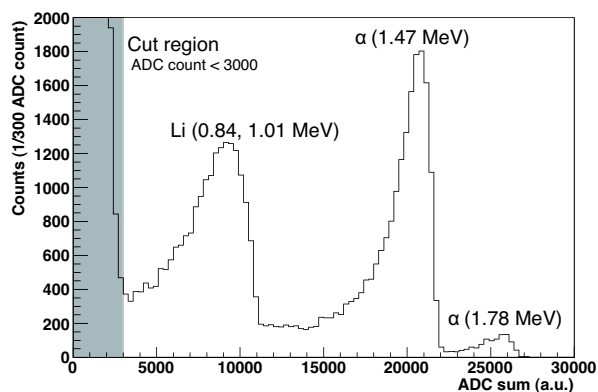


図 16: 中性子由来のクラスターの電荷和の分布。

ピクセル検出器の位置分解能を, 中性子吸収体である

Gd で作られた高精度のマスキングパターンを用いて, 中性子ビームによる影の明瞭さを測定することで算出した [8]。Gd パターンはダマシシ法 [9] を用いて, 東北大学ナノテク融合技術支援センターにおいて作製された。マスキングパターンは, 図 17 に示したような, 様々な太さの Gd 領域から構成されている。

マスキングパターンを検出器の直前  $150 \mu\text{m}$  に設置し, ILL の極冷中性子 (VCN) ビームラインを用いて位置分解能測定を行った。その結果を図 18 に示す。影の付いた領域は Gd によってマスクされ, 中性子カウントの少ない領域を表す。この分布を, マスキングパターンの形状と位置分解能としてエラーファンクションを用いた関数でフィットした。ベストフィットの結果が (赤) 実線である。フィットの結果, 位置分解能は  $3.35 \pm 0.09 \mu\text{m}$  と求められた。

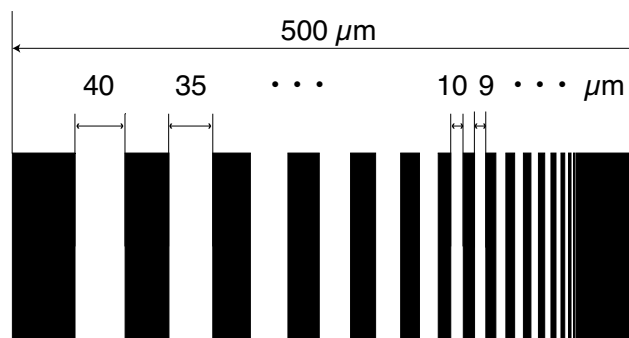


図 17: Gd マスキングパターンの設計。黒色の部分が Gd の領域を示す。

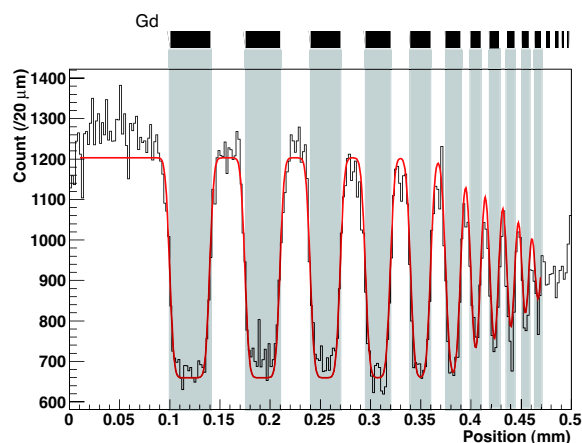


図 18: Gd マスキングパターンを用いた位置分解能測定の結果。

### 3 実験結果と解析

物理測定実験は、ILL の UCN ビームラインにおいて、2011 年 8 月に 17 日間にわたって行われた。以下に述べる量子力学に基づく計算と、実験結果の比較を行った。

#### 3.1 測定器内での量子状態の発展

検出器上で得られる分布を計算するためには、中性子が第  $n$  準位のエネルギー固有状態にいる確率  $p_n$  を計算する必要がある。コリメーティングガイド入口における準位の確率は、古典力学に基づいた計算によって求められたエネルギー分布 (図 19) を境界条件として取り入れた。図 19 のエネルギー分布に対するフィット関数のエネルギー固有値における値を、入口における準位の確率とした。

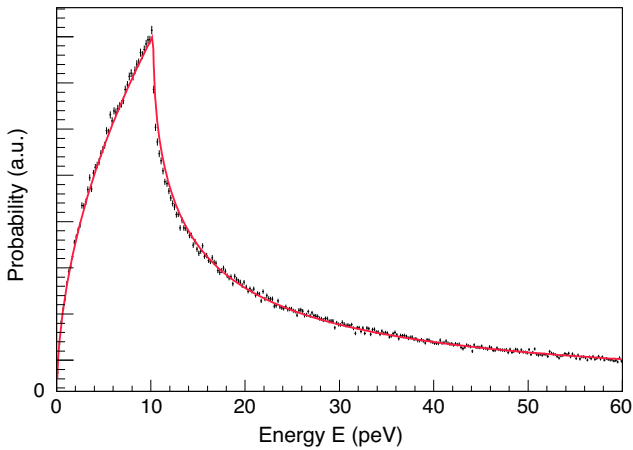


図 19: ガイド内に入る中性子の鉛直方向エネルギー分布。黒マークがモンテカルロによる分布、実線がフィット関数。

ガイド内では天井による吸収のため、高い準位の量子状態は取り除かれる。 $n = 1$  を基底状態とし、第  $n$  準位中性子が単位時間あたりに取り除かれる割合は、天井の粗さの範囲内に中性子が存在する確率に比例するという

$$\Gamma_n = \gamma \cdot \int_{h-2\delta}^h dz |\psi_n(z)| \quad (5)$$

の式によってモデル化されている [10]。ここで、 $\gamma$  は天井による除去の定数、 $h = 100 \mu\text{m}$  は天井の高さ、 $\delta = 0.4 \mu\text{m}$  は天井の粗さ、 $\psi_n$  は第  $n$  準位の固有関数である。また、床との衝突によって取り除かれる割合は、古典的なバウンド回数に比例する

$$B_n = \beta \cdot \left( g/2\sqrt{2} \right) \sqrt{\frac{m}{E_n}} \quad (6)$$

の式によってモデル化した。ここで、 $\beta$  は床による除去の定数、 $E_n$  は第  $n$  準位の固有エネルギーである。さら

に、コリメーティングガイド出口で天井がなくなるためにハミルトニアンが変化し、エネルギー固有関数の形が変化し、確率も変化する。これは、エネルギーの高い準位ほど顕著である。この過程の確率の変化は、突然近似 (Sudden Approximation) を用いて計算した [11]。干渉項があらわれるが、それぞれの超冷中性子の準位間の位相差がランダムに分布していると仮定すると、その平均はゼロになる。これらを考慮すると、ガイド出口における固有状態の確率分布は、図 20 のようになる。

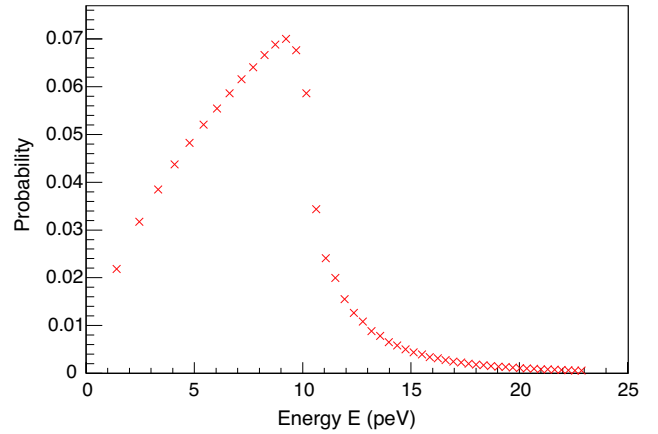


図 20: ガイド出口における固有状態の確率分布。

ガイドから出た超冷中性子の分布は、拡大ロッドの反射によって拡大される。この拡大の様子は、量子力学における位相空間上の準確率分布を与える、ウィグナー関数 [12] を用いて計算した。ウィグナー関数は、波動関数  $\psi$  を用いて、

$$W(z, p_z) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \psi^*(z - \frac{1}{2}\xi) \psi(z + \frac{1}{2}\xi) \exp\left(-\frac{ip_z\xi}{\hbar}\right). \quad (7)$$

と定義される。ここで、 $p_z$  は  $z$  方向の運動量である。ウィグナー関数を位置について積分すると運動量の確率分布、運動量について積分すると位置の確率分布を正しく与えるという性質を持つ。 $n = 3$  のときの量子状態のウィグナー関数を、位置と速度の空間上で表示すると図 21 のようになる。放物線状の領域を占めることは古典力学と共通であるが、図のような波打ち (モジュレーション) は量子力学に特有である。図 20 の準位を確率の重み付けをして加えていったウィグナー関数は、図 22 のようになる。これが、ガイド出口での位相空間上の準確率分布に相当する。この実験系のような線型ポテンシャルのとき、ウィグナー関数の位相空間上の運動は、古典力学と同じ方程式に従うことが知られている [13]。そのため、ピクセル検出器上での分布は、位相空間を  $0.1 \mu\text{m} \times 0.1 \text{mm/s}$  のメッシュで区切り、対応する検出器上の位置を古典力学の軌跡から求め、準確率分布であるウィグナー関数の値を各メッシュ点の重み付けとして

用いて計算した。

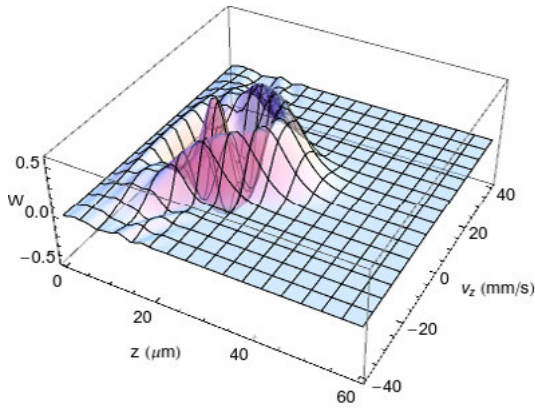


図 21:  $n = 3$  のときの重力による量子状態のウィグナー関数。

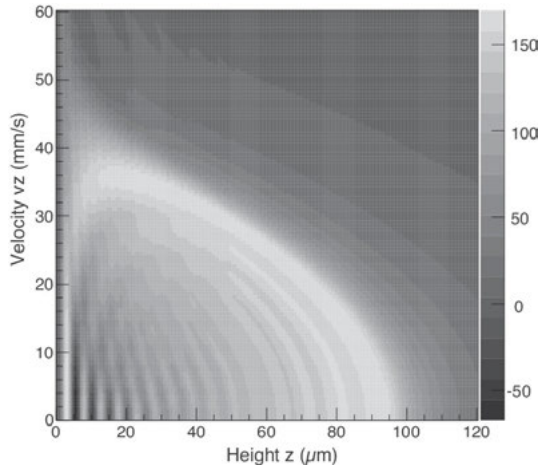


図 22: ガイド出口におけるウィグナー関数。速度プラスとマイナスで対称な分布のため、マイナスの領域は省略した。

### 3.2 フィッティング

Binned Maximum Likelihood 法を用いて、フィットを行った。使用したパラメータは、 $\theta$ ,  $Z_0$ ,  $d$ ,  $\gamma$ ,  $\beta$ ,  $s$  の六つである。 $\theta$  はピクセル検出器の検出器平面での回転を表し、データの位置  $Z$  を  $\theta$  回転によって  $Z \rightarrow Z'$  へ変換する。 $Z_0$  は計算による分布位置  $Z_{\text{pred}}$  と実験データの位置  $Z'$  を合わせるオフセットで、 $Z'$  と  $Z_{\text{pred}} + Z_0$  が対応する。 $d$  は検出器位置の設計上の高さを実際の高さの差を表し、 $d > 0$  のとき、設計位置より検出器が拡大ロッドから遠くにあることに相当し、拡大率を実効的に増大することになる。 $\gamma$  と  $\beta$  は天井と床による中性子除去のパラメータを表す。計算と実験データのイベント数が等しくなるように規格化し、 $s$  をシグナルの割合と

し、 $1 - s$  を検出器面で一様なバックグラウンドの割合とした。

この計算において、 $n \leq 50$  までの準位を考慮した。ベストフィットのパラメータは表 2 にまとめた。カイ二乗と自由度 (NDF) の比は、 $\chi^2/\text{NDF} = 402.6/394$  となった。実験データと計算による分布を図 23 に示す。データの分布は計算による分布とよく合っており、特にはじめの数個のモジュレーションが一致しているのが分かる。また、モジュレーションの形はほぼ  $n \leq 15$  までの準位の分布で決まっていることが分かる。

表 2: ベストフィットのパラメータ ( $\pm 1\sigma$  範囲)。

| パラメータ    | 値  |
|----------|--|
| $\theta$ | $-1.2540^{+0.0005}_{-0.0008}$ deg          |
| $Z_0$    | $-1.006 \pm 0.002$ mm                      |
| $d$      | $-0.03 \pm 0.01$ mm                        |
| $\gamma$ | $(5.0 \pm 0.9) \times 10^4 \text{ s}^{-1}$ |
| $\beta$  | $0.07 \pm 0.03$                            |

系統誤差による検出位置の不定性について評価した。その結果を表 3 にまとめた。 $\Delta Z$  はピクセル検出器上の位置に対する誤差で、 $\Delta z$  はガイド内での高さに対する誤差である。これらの値は、拡大率が 16.5 倍になる  $z = 0$ ,  $v_z = 0$  の軌道に対して評価した。すべての誤差を合算すると、 $z = 0$ ,  $v_z = 0$  の軌道を取る中性子に対するガイド内での高さの位置分解能として、 $\Delta z = 0.7 \mu\text{m}$  となった。

表 3: 系統誤差 ( $1\sigma$ ) の一覧。

| エラー原因         | $\Delta Z$         | $\Delta z$        |
|---------------|--------------------|-------------------|
| $v_x$ のばらつき   | $1.2 \mu\text{m}$  | $0.1 \mu\text{m}$ |
| 拡大ロッドの粗さ      | $4.8 \mu\text{m}$  | $0.3 \mu\text{m}$ |
| ピクセル検出器の分解能   | $3.4 \mu\text{m}$  | $0.2 \mu\text{m}$ |
| ピクセル検出器受光面の粗さ | $10.6 \mu\text{m}$ | $0.6 \mu\text{m}$ |
| 計             | $12.1 \mu\text{m}$ | $0.7 \mu\text{m}$ |

## 4 まとめ

超冷中性子の分布を拡大する測定器システムを用いて、重力による束縛状態の空間分布をサブミクロンの精度で測定することができた。超冷中性子の鉛直方向の分布は、円柱形のロッドによって拡大され、ピクセル検出器で検出された。検出器上で測定された超冷中性子分布は、位相空間上の正確率分布であるウィグナー関数を用いて導くことができた。得られた実験データのはじめの

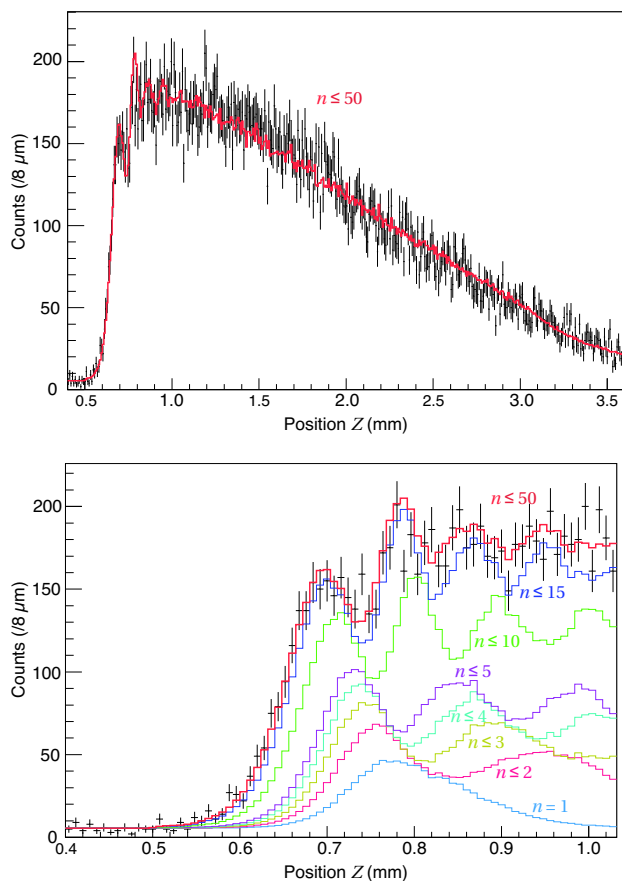


図 23: 実験結果と量子力学に基づいた計算の、中性子分布の比較。分布全体 (上) と  $Z$  の小さい部分 (下)。(黒) 十字マークが実験結果で実線が計算結果を表す。第 50 準位まで使って計算した。

数個のモジュレーションの形は、計算によるものとよく一致している。この実験で、重力による量子状態をサブミクロンの精度で測定することに世界ではじめて成功した。今回の結果では分布の拡大率を変化させるパラメータを課しているため、重力の逆二乗則や等価原理の正当性に対して新たな制限を加えることはできていない。

## 5 謝辞

様々な方のご助力により、本研究を行うことができました。ガラスロッド制作において、大阪大学超精密科学研究センターの山村和也准教授、永野幹典博士のご協力を頂きました。京大原子炉実験所の日野正裕准教授、名古屋大学の北口雅暁准教授には、真空蒸着においてご協力を頂きました。この場をお借りして、深く感謝申し上げます。

## 参考文献

- [1] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory (3rd ed.)* (Butterworth-Heinemann, Oxford, 1981), p. 74; J. J. Sakurai and J. J. Napolitano, *Modern Quantum Mechanics (2nd ed.)* (Addison-Wesley, San Francisco, CA, 2010), p. 108.
- [2] V. V. Nesvizhevsky *et al.*, *Nature (London)* **415**, 297 (2002); *Eur. Phys. J. C* **40**, 479 (2005).
- [3] V. V. Nesvizhevsky and K. V. Protasov, *Class. Quantum Grav.* **21**, 4557 (2004).
- [4] E. Kajari *et al.*, *Appl. Phys. B* **100**, 43 (2010).
- [5] T. Sanuki, S. Komamiya, S. Kawasaki and S. Sonoda, *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res., Sect. A* **600**, 657 (2009).
- [6] A. Steyerl *et al.*, *Phys. Lett. A* **116**, 347 (1986).
- [7] S. Tasaki, T. Ebisawa, T. Akiyoshi, T. Kawai and S. Okamoto, *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res., Sect. A* **355**, 501 (1995).
- [8] S. Kawasaki, G. Ichikawa, M. Hino, Y. Kamiya, M. Kitaguchi, S. Komamiya, T. Sanuki and S. Sonoda, *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res., Sect. A* **615**, 42 (2010).
- [9] P. C. Andricacos, C. Uzoh, J. O. Dukovic, J. Horkans and H. Deligianni, *IBM J. Res. Develop.* **42**, 567 (1998).
- [10] A. Westphal, H. Abele, S. Baeßler, V. V. Nesvizhevsky, K. V. Protasov and A. Y. Voronin, *Eur. Phys. J. C* **51**, 367 (2007).
- [11] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics 3rd ed.* (McGraw-Hill, New York, 1968), p. 292.
- [12] E. P. Wigner, *Phys. Rev.* **40**, 749 (1932); M. Hillery, R. F. O'Connell, M. O. Scully and E. P. Wigner, *Phys. Rep.* **106**, 121 (1984).
- [13] W. P. Schleich, *Quantum Optics in Phase Space* (Wiley-VCH, Berlin, 2001), p. 76.